

ANNEXES DE CALCULS

A CALCUL DU « SPINE » D'UNE FLECHE ALUMINIUM

A.1 Calcul de la déformation de la flèche

Notations pour le calcul du « spine » :

L : Longueur entre les deux points d'appuis en mètres.

P : Poids appliqué au centre de la poutre en Newtons.

d : déformation de la poutre en mètres.

I : Module d'inertie appelé aussi moment quadratique de la section de la poutre en m^4 .

E : Module de Young en Pascal (1 pascal = 1 Newton par m^2)¹.

\ddot{y} : Dérivée seconde de la déformation y par rapport à x.

M_f : Moment fléchissant dans une section de la poutre en Nm (Newton mètre).

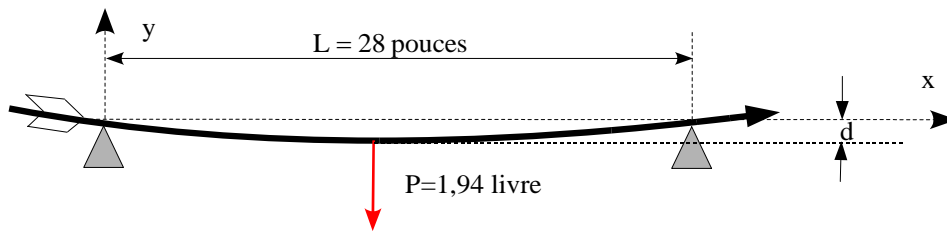


Figure A.1 : Dispositif expérimental de la mesure du « spine »

Notations pour la flèche

d_e : Diamètre extérieur du tube en mètre

d_i : Diamètre intérieur du tube en mètre

e : Epaisseur du tube en mètre

L_f : Longueur de la flèche en mètre

Le calcul de la déformation d'une poutre est géré par l'équation différentielle suivante :

$$EI \ddot{y}(x) = -M_f(x)^2 \quad (A.1)$$

Isolons la poutre à une abscisse x

A une abscisse x le moment fléchissant vaut :

$$\text{Pour } 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \quad M_f(x) = -\frac{P}{2}x \quad (A.2)$$

$$\text{Pour } \frac{L}{2} \leq x \leq L \quad M_f(x) = -\frac{P}{2}(L-x)$$

¹ En résistance des matériaux, le module de Young relie la contrainte à la déformation.

² Nous renvoyons ici le lecteur aux ouvrages traitant de la déformation isostatique des poutres.

Pour calculer la déformation de cette poutre, il suffit de considérer l'abscisse jusqu'à la moitié de la portée. Sur cet intervalle, nous allons appliquer l'équation différentielle régissant la déformation de la poutre.

Avec $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$ nous aurons :

$$\ddot{y}(x) = -\frac{1}{EI} M_f(x) \quad \ddot{y}(x) = \frac{1}{EI} \frac{P}{2} x$$

Afin d'obtenir la dérivée première, intégrons cette équation par rapport à x .

$$\dot{y}(x) = \int_0^{L/2} \left(\frac{1}{EI} \frac{P}{2} \right) dx \quad \dot{y}(x) = \frac{P}{2EI} \frac{x^2}{2} + a_1$$

Pour $x = \frac{L}{2}$ la dérivée de la déformation est nulle (tangente horizontale) ce qui donne :

$$a_1 = -\frac{PL^2}{16EI}$$

Maintenant afin d'avoir la déformation, intégrons la dérivée première :

$$y(x) = \frac{P}{4EI} \int_0^{L/2} \left(x^2 - \frac{L^2}{4} \right) dx \quad y(x) = \frac{P}{4EI} \left[\frac{x^3}{3} - \frac{L^2}{4} x \right] + a_2$$

Au début de la poutre ($x = 0$), la déformation est nulle ($y = 0$) ce qui donne $a_2 = 0$.

la déformation au centre de la poutre a lieu pour $x = \frac{L}{2}$.

$$y = \frac{P}{4EI} \left[\frac{L^3}{24} - \frac{L^3}{8} \right] \quad y = \frac{P}{4EI} \left[\frac{L^3}{24} - \frac{3L^3}{8} \right] \quad y = -\frac{PL^3}{48EI} \quad (\text{A.3})$$

Nous ne considérerons pas le signe, qui est ici conventionnel et prendrons comme déformation au centre de la flèche :

$$\boxed{y = \frac{PL^3}{48EI}} \quad (\text{A.4})$$

Pour l'aluminium le module de Young vaut $E = 7 \cdot 10^{10}$ Pa

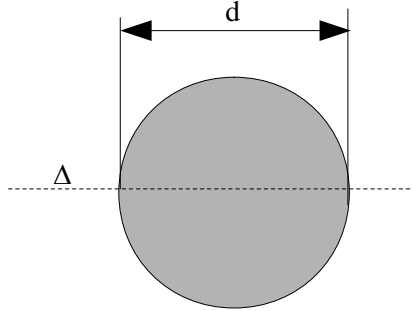
Pour le bois $E \approx 10^{10}$ Pa

Pour des fibres de carbone $E \approx 24 \cdot 10^{10}$ Pa

Par rapport à une flèche en bois, une en aluminium sera 7 fois plus rigide et une carbone, 24 fois plus rigide que le bois.

A.2 Module d'inertie.

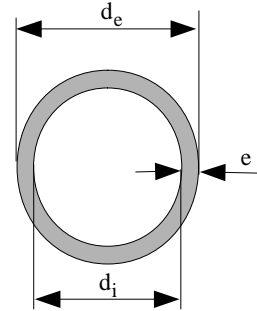
Nous allons maintenant exprimer le module d'inertie pour des cylindres pleins et creux.³



Module d'inertie par rapport à la droite Δ

$$I = \frac{\pi d^4}{64}$$

Figure A.2 : Module d'inertie d'un cylindre



Module d'inertie par rapport à la droite Δ

$$I = \frac{\pi}{64} (d_e^4 - d_i^4)$$

Figure A.3 : Module d'inertie d'un cylindre creux

Pour une déformation exprimé en mètre le module d'inertie est en m^4 .

A.2.1 Calcul pour une flèche aluminium

Ce type de flèche est caractérisé par deux nombres.

N_1 : Nombre indiquant le diamètre de la flèche en soixante-quatrième de pouce

N_2 : Nombre donnant l'épaisseur en millième de pouce

Les informations sont le diamètre et l'épaisseur :

$$d_e = \frac{0,0254 N_1}{64} \quad e = \frac{0,0254 N_2}{1000} \quad d_i = d_e - 2e$$

Calcul direct du module d'inertie

A partir de ces données conformément à la Figure A.3, nous aurons :

$$I = \frac{\pi}{64} (d_e^4 - d_i^4) \quad (A.5)$$

Exemple flèche 18-14

Ici $N_1 = 18$ et $N_2 = 14$.

$$d_e = 7,14 \text{ mm} \quad d_i = 6,43 \text{ mm} \quad e = 0,36 \text{ mm}$$

$$I = 4,379919 \cdot 10^{-11} \text{ m}^4$$

³ Nous renvoyons le lecteur aux ouvrages de résistances des matériaux.

Calcul du module d'inertie à partir des données du constructeur

Une autre solution est d'utiliser les nombres N_1 et N_2 pour calculer le module d'inertie, dans ce cas, il faut expliciter le diamètre intérieur à partir du diamètre extérieur et de l'épaisseur.

$$I = \frac{\pi}{64} (d_e^4 - d_i^4) = \frac{\pi}{64} (d_e^4 - (d_e - 2e)^4) = \frac{\pi}{64} (8d_e^3 \cdot e - 24d_e^2 \cdot e^2 + 32d_e \cdot e^3 - 16e^4)$$

L'épaisseur étant petite devant le diamètre de la flèche nous allons négliger les termes en e^3 et e^4 , nous aurons :

$$I = \frac{\pi}{64} (d_e^4 - d_i^4) \approx \frac{\pi}{64} (8d_e^3 \cdot e - 24d_e^2 \cdot e^2) \quad (\text{A.6})$$

Les valeurs sont exprimés ici en mètres, formulons les à partir de N_1 et N_2 .

Par définition N_1 est en pouces divisé par 64, soit :

$$N_1 = \frac{64}{0,0254} d_e \Rightarrow d_e = \frac{0,0254}{64} N_1$$

Pour N_2 qui quantifie l'épaisseur du tube c'est en pouces divisé par 1000.

$$N_2 = \frac{1000}{0,0254} e \Rightarrow e = \frac{0,0254}{1000} N_2$$

En reportant ces relation dans (A.6) il vient :

$$I = \frac{\pi}{64} (d_e^4 - d_i^4) \approx \frac{\pi}{64} (a_3 N_1^3 \cdot N_2 - a_2 N_1^2 \cdot N_2^2) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a_3 = 1,2702 \cdot 10^{-14} \\ a_2 = 2,4389 \cdot 10^{-15} \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

$$I \approx b_3 N_1^3 \cdot N_2 - b_2 N_1^2 \cdot N_2^2 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} b_3 = 6,2353 \cdot 10^{-16} \\ b_2 = 1,1972 \cdot 10^{-16} \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

Exemple flèche 18-14

Pour cette flèche : $N_1 = 18$ et $N_2 = 14$.

Un calcul exact du module d'inertie par la relation (A.5) donne $I = 4,379919 \cdot 10^{-11} \text{ m}^4$.

La relation simplifiée, (A.8) utilisant les valeurs du constructeur N_1 et N_2 fournie :

$$I = 4,330717 \cdot 10^{-11} \text{ m}^4$$

Cette approximation donne une erreur de l'ordre du 1,1% ce qui est suffisant au regard des tolérances de fabrication des flèches.

A.3 Calcul du « spine »

Reprenons la relation (A.4) donnant la déformation de la flèche : $y = \frac{PL^3}{48E} \frac{1}{I}$

Pour calculer le « spine » d'une flèche, il faut exprimer sa déformation 'y' en pouces et multiplier par mille :

$$\text{spine} = \left(\frac{1000}{0,0254} \frac{PL^3}{48E} \right) \frac{1}{I}$$

Le poids P, la portée L sont définis par le dispositif expérimental (cf. Figure A.1), le module de Young dépend du matériau.

Avec l'expression du module d'inertie (relation (A.5))

$$\text{spine} = \left(\frac{1000}{0,0254} \frac{PL^3}{48E} \right) \frac{1}{I} \quad \text{avec } I = \frac{\pi}{64} (d_e^4 - d_i^4) \quad (\text{A.9})$$

$$\text{spine} = \frac{1000}{0,0254} \frac{PL^3}{48E} \frac{64}{\pi (d_e^4 - d_i^4)} \quad (\text{A.10})$$

$$\boxed{\text{spine} = \frac{7,410298 \cdot 10^{-7}}{(d_e^4 - d_i^4)}} \quad (\text{A.11})$$

Si l'on veut exprimer le « spine » à partir des données du constructeur N_1 et N_2 , reprenons la relation (A.8)

$$I \approx b_3 N_1^3 \cdot N_2 - b_2 N_1^2 \cdot N_2^2$$

Nous obtenons :

$$\text{spine} \approx \left(\frac{1000}{0,0254} \frac{PL^3}{48E} \right) \frac{1}{b_3 N_1^3 \cdot N_2 - b_2 N_1^2 \cdot N_2^2}$$

$$\boxed{\text{spine} \approx \frac{10^9}{17,14152 \cdot N_1^3 \cdot N_2 - 3,29117 \cdot N_1^2 \cdot N_2^2}} \quad (\text{A.12})$$

Exemple Flèche 18 14

Pour une flèche 18-14 ; $N_1 = 18$ et $N_2 = 14$ un calcul exact par l'intermédiaire de la relation (A.11) donne un « spine » de 830.

L'utilisation directe des valeurs de N_1 et N_2 , avec la relation (A.12), donne un « spine » de 840, ce qui est correct (erreur de 1,2 %).

B FLAMBEMENT D'UNE FLECHE

B.1 Définition et calcul du flambage

Lorsque l'on soumet une poutre à deux forces opposées dans l'axe de celle-ci, il existe une valeur critique $F = F_c$ pour laquelle la poutre s'incurve, cf. Figure B.1.

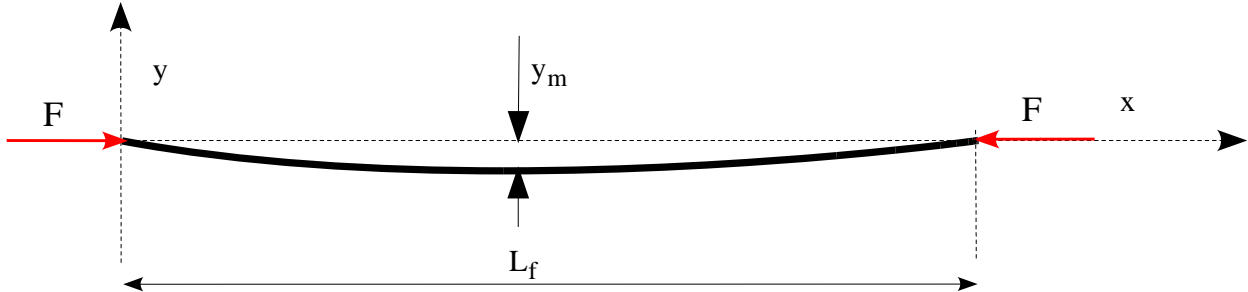


Figure B.1 : Déformation d'une poutre en compression

Nous allons, comme dans le § A.1 *Calcul de la déformation de la flèche*, calculer la déformation de la poutre.

Soit $y(x)$ la déformation de la poutre à une abscisse x .

Le moment fléchissant pour cette abscisse vaut : $M_f(x) = F \cdot y(x)$. (B.1)

Reprenons la relation (A.2) $EI \ddot{y} = -M_f$, nous avons ici : $EI \ddot{y}(x) = -F \cdot y(x)$

Soit : $EI \ddot{y}(x) + F \cdot y(x) = 0$ (B.2)

Cette équation différentielle à une solution sinusoidale de la forme :

$$y(x) = a_1 \sin\left(\frac{n \pi x}{L}\right) \quad (B.3)$$

Le coefficient 'n' représente ici l'ordre de multiplicité de la déformation, cf. Figure B.2.

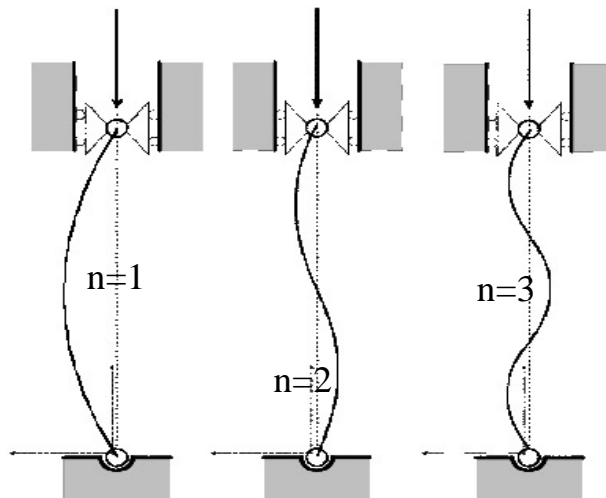


Figure B.2 : Multiplicité du flambement

Nous prendrons ici $n = 1$.

Dérivons l'équation (B.3) correspondante à la déformation.

$$\begin{aligned} \dot{y}(x) &= a_1 \frac{\pi}{L} \cos\left(\frac{\pi}{L_f} x\right) \quad \text{Dérivons à nouveau, il vient :} \\ \ddot{y}(x) &= -a_1 \frac{\pi^2}{L_f^2} \sin\left(\frac{\pi}{L} x\right) \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Reprenons l'expression (B.2) du moment fléchissant et celle de la déformation (B.3) :

$$EI \ddot{y}(x) = -F a_1 \sin\left(\frac{\pi}{L_f} x\right)$$

Reportons dans le premier terme l'expression de la dérivée seconde (B.4)

$$EI a_1 \frac{\pi^2}{L_f^2} \sin\left(\frac{\pi}{L_f} x\right) = F a_1 \sin\left(\frac{\pi}{L_f} x\right) \Rightarrow EI \frac{\pi^2}{L_f^2} = F$$

Cette expression donne la force critique à partir de laquelle une déformation de flambement s'amorce.

$$\boxed{F_c = EI \frac{\pi^2}{L_f^2}} \quad (\text{B.5})$$

B.2 Flambement d'une flèche aluminium

Les deux nombres caractéristiques du diamètre et de l'épaisseur étant donné par le constructeur, le module d'inertie peut être facilement calculée cf. § A.2.1 *Calcul pour une flèche aluminium page 29*.

Connaissant le module E de Young E, pour l'aluminium et la longueur L de la flèche, le calcul du module d'inertie se fera par l'intermédiaire des relations (A.5) ou (A.8).

Un calcul direct de la force critique de flambement à partir des diamètres d_e et d_i donne :

$$F_c = \frac{\pi^3 E}{64} (d_e^4 - d_i^4) \frac{1}{L_f^2} \text{ ici } F_c \text{ est exprimé en Newtons.}$$

La force ce flambement critique en kgf est la suivante :

$$\boxed{F_c = 3,4582 \cdot 10^9 \left(\frac{d_e^4 - d_i^4}{L_f^2} \right)} \quad (\text{B.6})$$

Si l'on désire exprimer cette force à partir des nombres N_1 et N_2 nous utilisons, pour exprimer le module d'inertie, la relation (A.8).

$$F_c \approx E \pi^2 \left(\frac{b_3 N_1^3 \cdot N_2 - b_2 N_1^2 \cdot N_2^2}{L_f^2} \right)$$

Que l'on mettra sous la forme : $F_c \approx \frac{c_3 N_1^3 \cdot N_2 - c_2 N_1^2 \cdot N_2^2}{L_f^2}$ avec $\begin{cases} c_3 = 4,3078 \cdot 10^{-4} \\ c_2 = 8,2709 \cdot 10^{-5} \end{cases}$

Pour une force critique exprime en kgf nous aurons :

$$F_c \approx \frac{d_3 N_1^3 \cdot N_2 - d_2 N_1^2 \cdot N_2^2}{L_f^2} \text{ avec } \begin{cases} d_3 = 4,3927 \cdot 10^{-5} \\ d_2 = 8,4340 \cdot 10^{-6} \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

B.3 Flambement d'une flèche carbone

Les données d'une flèche en carbone se réduisant à sa déformation donné par son « *spine* » nous allons calculer la force critique.

L : Distance des appuis pour l'établissement du « *spine* »

L_f : Longueur de la flèche

Calculons tout d'abord le « *spine* » par l'intermédiaire de la relation (A.9)

$$\text{spine} = \frac{1000}{0,0254} \frac{PL^3}{48EI} \quad \text{ce qui donne : } EI = \frac{1000PL^3}{1,2192 \text{ spine}}$$

Connaissant le poids P,

Reprenons l'expression (B.5) de la force critique de flambage :

$$F_c = EI \frac{\pi^2}{L_f^2} \text{ et reportons le produit EI}$$

$$F_c = \frac{1000PL^3 \pi^2}{1,2192 \text{ spine } L_f^2}$$

La charge P de 1,94 livres correspond à $P = 8,6299 \text{ N}$ la longueur entre appuis de 28 pouces vaut $L = 0,7112 \text{ m}$; nous obtenons une relation de la forme : $F_c = \frac{c_0}{L_f^2 \text{ spine}}$, soit

$$F_c = \frac{2,513063 \cdot 10^4}{L_f^2 \text{ spine}} \text{ avec } F_c \text{ en newtons}$$

ou
$$F_c = \frac{2,562611 \cdot 10^3}{L_f^2 \text{ spine}} \text{ avec } F_c \text{ en kgf} \quad (\text{B.8})$$

C INTRODUCTION AUX CALCULS DE TRAJECTOIRES

Pour calculer, la trajectoire d'un corps, il faut résoudre l'équation fondamentale de la dynamique qui relie l'accélération et la masse de celui-ci, aux forces qui sollicitent le solide en mouvement.

Équation fondamentale de la dynamique : $\sum \text{Force} = \text{Masse} \cdot \text{accélération}$ (C.1)

Ainsi, un corps qui n'est soumis à aucune force aura une accélération nulle, sa vitesse sera constante et sa trajectoire sera rectiligne.

Dans la phase de propulsion, la corde fournira une force de propulsion décroissante qui donnera à la flèche une accélération, à la fin de cette phase, la flèche aura une vitesse initiale V_0 .

Dans la phase balistique, la vitesse de la flèche diminuera, et celle-ci aura une trajectoire en cloche. Durant cette phase, seuls le poids et les frottements de l'air solliciteront la flèche.

D CALCUL DE LA PHASE DE PROPULSION DE LA FLECHE

D.1 Calcul de la vitesse de libération de la flèche

Reprenons l'évolution de la force de propulsion en fonction de la position de la corde durant la décoche.

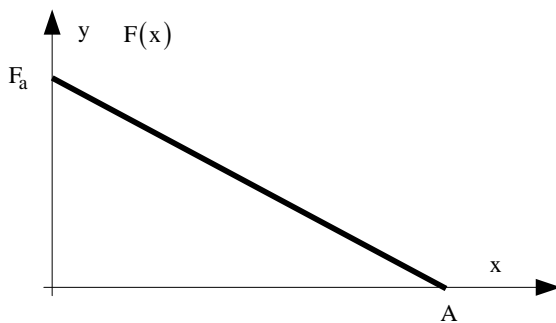


Figure D.1

Avec cette décroissance linéaire de la force de propulsion lorsque la tension de la corde varie entre zéros et A ; l'expression $F(x)$ prend la forme suivante : $F(x) = F_a - \frac{F_a}{A} x$. (C.2)

L'idée de base pour calculer la vitesse de la flèche est de considérer que l'énergie potentielle de la corde est égale, aux pertes près, à énergie cinétique de la flèche.

Les pertes étant principalement dues aux frottements des branches dans l'air et aux vibrations dissipées dans l'arc.

Notons W_p l'énergie potentielle de la tension de la corde ; sachant que l'énergie d'une force se déplaçant est égale à celle-ci multiplié par son déplacement ; l'énergie potentielle sera l'intégrale de la force de la corde sur la longueur d'armement « A ».

$W_p(x) = \int_0^A F(x) dx$; En explicitant la forme de $F(x)$ par son expression (C.2) nous aurons :

$$W_p(x) = \int_0^A \left(F_a - \frac{F_a}{A} x \right) dx \quad W_p = F_a \left[x - \frac{x^2}{2A} \right]_0^A \quad W_p = F_a \left[A - \frac{A}{2} \right]$$

L'énergie durant la propulsion aura l'expression simple suivante :

$$W_p = F_a \frac{A}{2} \quad (D.1)$$

Ce résultat était prévisible puisque l'intégrale calculée correspond à la surface sous-tendue par $F(x)$ qui est ici un triangle rectangle de base A et de hauteur F_a .

À la fin de la propulsion, la flèche est animée d'une vitesse V et l'énergie cinétique de celle-ci vaut :

$$W = \frac{1}{2} m V^2 \quad (D.2)$$

Les pertes par frottements et vibrations conduisent à ce qu'une partie de l'énergie potentielle soit transmise à la flèche ; notons η cette efficacité, avec évidemment $\eta < 1$.

Nous aurons : $W = \eta W_p$, les relations (D.1) et (D.2) donnent :

$$W = \eta F_a \frac{A}{2} = \frac{1}{2} m V^2, \text{ ce qui donne pour la vitesse de la flèche :}$$

$$V = \sqrt{\frac{\eta F_a A}{m}} \quad (D.3)$$

D.2 Calcul de la dynamique de propulsion

La flèche étant encochée et reposant sur son support flèche son poids se répartit sur ces deux point. Par contre dans la direction ox la flèche est soumise à la force de propulsion $F(x)$.

L'équation régissant le mouvement s'écrit : $m \ddot{x}(t) = F(x)$ soit en explicitant la force de propulsion (C.2) :

$$m \ddot{x}(t) = F_a - \frac{F_a}{A} x(t)$$

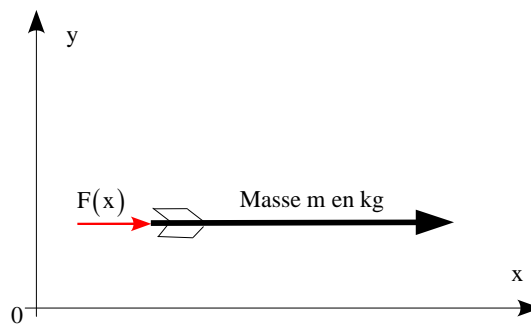


Figure D.2

$$\ddot{x}(t) = \frac{F_a}{m} - \frac{F_a}{mA} x$$

Nous pouvons vérifier que pour $x = A$, valeur de l'armement, l'accélération devient nulle, puisque c'est le moment de libération de la flèche.

Cette équation a été résolue par des techniques d'intégration numériques conformément au schéma bloc suivant :

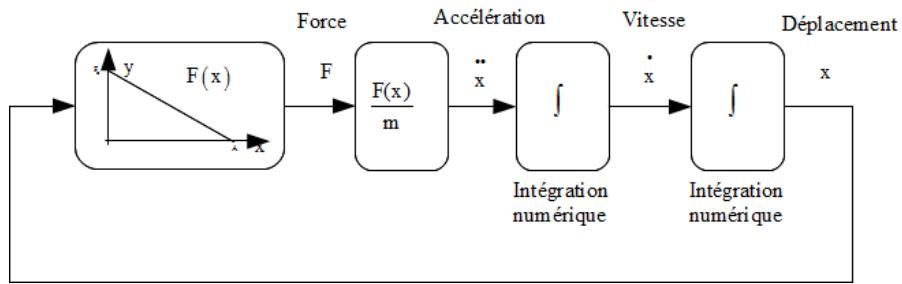


Figure D.3

E CALCUL DE LA PHASE BALISTIQUE DE LA FLECHE

E.1 Introduction

Dans notre cas, la flèche est soumise à deux forces, son poids qui la fera descendre vers le bas, et les frottements de l'air qui ralentiront sa course.

Nous prendrons, pour décrire le mouvement de la flèche, un repère orthonormé xoy dans lequel nous formulerons, dans les directions verticales et horizontales, l'accélération, la vitesse et le déplacement, cf. Figure E.1.

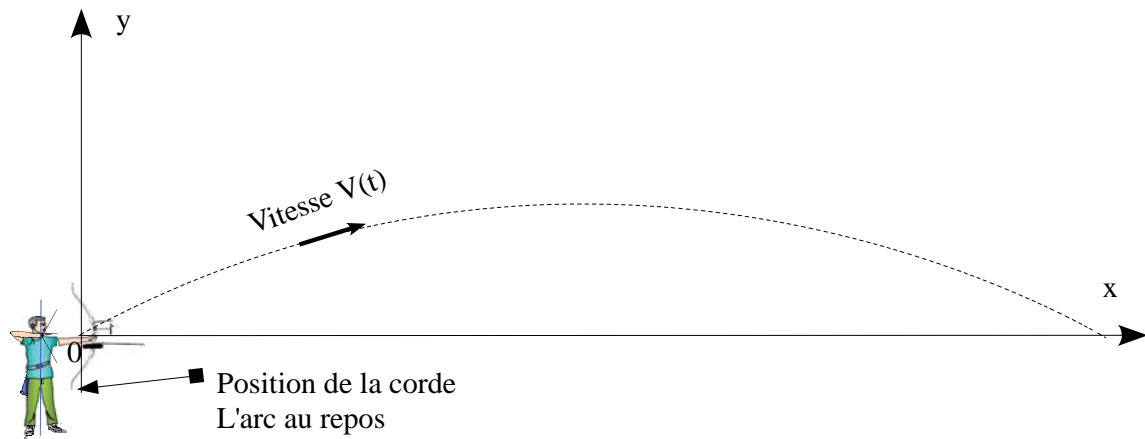


Figure E.1 : Repère de calcul de la trajectoire de la flèche

Notations pour le mouvement de la flèche :

$x(t)$: Le déplacement dans le plan horizontal en fonction du temps.

$\dot{x}(t)$: Dérivée première du déplacement qui correspond à la vitesse dans la direction horizontale ox .

$\ddot{x}(t)$: Dérivée seconde du déplacement qui correspond à l'accélération dans la direction horizontale ox .

$y(t)$: Déplacement dans le plan vertical en fonction du temps dans la direction verticale oy .

$\dot{y}(t)$: Dérivée première du déplacement qui correspond à la vitesse dans la direction verticale oy .

$\ddot{y}(t)$: Dérivée seconde du déplacement qui correspond à l'accélération dans la direction verticale oy .

Notations relatives à la flèche :

$F_a(t)$: Force de frottement dans l'air s'opposant au mouvement de la flèche

C_x : Le coefficient de frottement dans l'air de la flèche

g : Accélération de la pesanteur

ρ : Masse spécifique de l'air en kg/m^3

Pour un tir sous un angle α , écrivons l'équation fondamentale de la dynamique (C.1) en la projetant sur les axes horizontaux et verticaux ox et oy .

E.2 Cas d'une trajectoire sans frottement de l'air

Dans un premier temps nous ne considérerons pas les frottements de l'air.

Dans ce cas, la vitesse de la flèche dans la direction horizontale sera constante, par contre, le poids de la flèche fera chuter celle-ci dans la direction verticale.

L'équilibre de la flèche et les vitesses de celle-ci sont donnés Figure E.2 et Figure E.3.

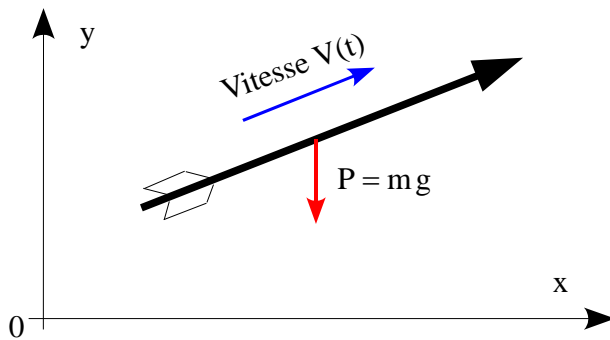


Figure E.2 : Équilibre dynamique de la flèche

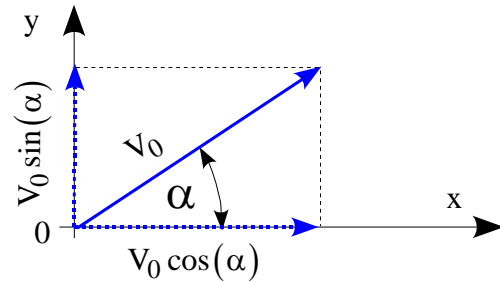


Figure E.3 : Décomposition de la vitesse

La flèche est soumise à son poids P et se trouve animée à un instant t de la vitesse $V(t)$.

À l'instant initial, après la *phase de propulsion*, la vitesse est V_0 , elle se décompose suivant l'axe horizontal et vertical en deux composantes :

Sur l'axe horizontal ox ; $V_0 \cos(\alpha)$ et sur l'axe vertical oy $V_0 \sin(\alpha)$.

Analysons maintenant l'équilibre dynamique de la flèche ; sans frottement, la seule force extérieure est son poids. Écrivons maintenant l'équation fondamentale de la dynamique sur les axes Ox et Oy .

E.2.1 Expressions sur ox et oy des accélérations

Axe horizontal ox

Ici, la relation (C.1) donne : $m \ddot{x}(t) = 0 \Rightarrow \ddot{x}(t) = 0$

Dans la direction horizontale, l'accélération est nulle, ce qui implique une vitesse constante, situation logique en absence de frottements de l'air.

Axe vertical oy

Dans cette direction, le poids de la flèche va conduire à une accélération égale à celle de la pesanteur soit :

$$m \ddot{y}(t) = -mg \Rightarrow \ddot{y}(t) = -g$$

La flèche chute avec l'accélération de la pesanteur, ce qui est normal.

E.2.2 Expressions sur ox et oy des vitesses

Pour obtenir la vitesse, il faut intégrer l'accélération.

Axe horizontal ox

Comme la vitesse est l'intégrale de l'accélération, celle-ci sera constante.

Elle est égale ici à la vitesse initiale de la flèche projetée sur la direction ox à la fin de la *phase de propulsion*.

$$\dot{x}(t) = V_{0x} \quad \dot{x}(t) = V_0 \cos(\alpha)$$

Axe vertical oy

Pour la vitesse dans la direction horizontale, nous aurons :

$$\dot{y}(t) = \int_0^t -g dt \quad \dot{y}(t) = V_{0y} - g t$$

$$\dot{y}(t) = V_0 \sin(\alpha) - g t$$

Le premier terme correspond à la vitesse initiale qui fait monter la flèche, le second est celui de la chute de la flèche due à la pesanteur.

A.1.1 Expressions sur ox et oy des déplacements

Pour obtenir le déplacement, il faut intégrer la vitesse.

Axe horizontal ox

$$x(t) = \int_0^t V_0 \cos(\alpha) dt \quad \boxed{x(t) = V_0 \cos(\alpha) t} \quad (\text{E.1})$$

Axe vertical oy

$$y(t) = \int_0^t V_0 \sin(\alpha) dt - \int_0^t g t dt$$

$$\boxed{y(t) = V_0 \sin(\alpha) t - \frac{1}{2} g t^2} \quad (\text{E.2})$$

E.2.3 Calcul de l'angle de tir et du temps balistique

Le fait d'avoir négligé les frottements de l'air donne des expressions algébriques de la trajectoire simples.

Les équations (E.1) et (E.2) nous permettent de vérifier que la flèche est entraînée vers le bas avec l'accélération de la pesanteur à laquelle s'oppose la composante verticale du frottement de l'air.

Reprenons ces équations

$$x = V_0 \cos(\alpha) t \quad y = V_0 \sin(\alpha) t - \frac{1}{2} g t^2$$

Nous allons rechercher l'angle α , qui pour une distance D atteint un point à l'horizontale de la visée. Cela revient réécrire les équations précédentes sous les formes suivantes :

$$D = V_0 \cos(\alpha) t_1 \quad (\text{E.3})$$

$$0 = V_0 \sin(\alpha) t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 \quad (\text{E.4})$$

La relation (E.3) permet de calculer $t_1 = \frac{D}{V_0 \cos(\alpha)}$ reportons dans (E.4) il vient :

$$V_0 \sin(\alpha) - \frac{1}{2} g t_1 = 0 \Rightarrow V_0 \sin(\alpha) = \frac{1}{2} g \frac{D}{V_0 \cos(\alpha)} \quad 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) = \frac{g D}{V_0^2}$$

Sachant que $2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) = \sin(2\alpha)$ il vient : $\sin(2\alpha) = \frac{g D}{V^2}$

Ce qui donne pour l'angle α $\alpha = \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{g D}{V_0^2}\right)$ (E.5)

Le temps de parcours est alors obtenu par (E.3) $t_1 = \frac{D}{V_0 \cos(\alpha)}$ (E.6)

E.3 Cas avec prise en compte des frottements sur la flèche

Les relations précédentes donnent un ordre de grandeur, qui peut être considéré comme valable sur de courtes distances de tir, mais ne sauraient être employées autrement. Il est impératif pour avoir plus de précision de prendre en compte les frottements de l'air sur la flèche.

E.3.1 Calcul du frottement de l'air

Les lois de l'aérodynamique donnent une force de frottement due à la pénétration dans l'air proportionnelle au carré de la vitesse. $F_a(t) = \frac{1}{2} C_x S \rho V(t)^2$ (E.7)

E.3.2 Équilibre dynamique de la flèche

Avec une force de frottement $F_a(t)$ l'équilibre dynamique de la flèche est donné Figure E.4.

La décomposition de la vitesse $V(t)$ correspond aux dérivées des déplacements sur les axes ox et oy , cf. Figure E.5.

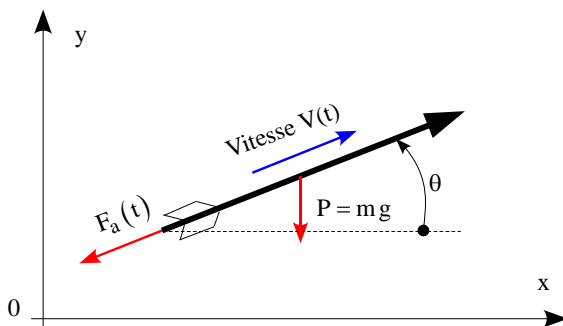


Figure E.4 : Équilibre dynamique de la flèche

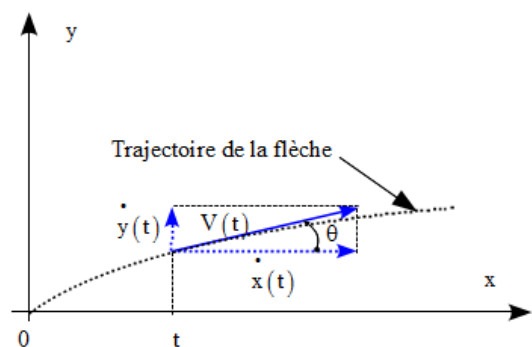


Figure E.5 : Décomposition de la vitesse

Durant la trajectoire, l'inclinaison θ de la flèche par rapport à l'horizontale varie.

La force de frottement peut se décomposer :

Sur ox : $-F_a(t) \cos(\theta)$ et sur oy $-F_a(t) \sin(\theta)$

Sachant $\sin(\theta) = -\sin(-\theta)$ et que $\cos(\theta) = \cos(-\theta)$, le cosinus sera toujours positif et le sinus aura le signe de θ .

Dans la direction horizontale, la force de frottement sera toujours négative et s'opposera au mouvement.

Dans la direction verticale, lorsque la flèche monte la force de frottement est négative et lorsque la flèche descend ($\theta < 0$) la force de frottement sera positive.

Nous retrouvons là, une évidence, la force de résistance de l'air qui s'oppose toujours au mouvement de la flèche.

L'angle θ pourra être déterminé par les composantes de la vitesse : $\tan(\theta(t)) = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$

Comme précédemment, exprimons l'équation fondamentale de la dynamique (C.1) dans les directions horizontales et verticales ox et oy .

A.1.1 Expressions sur ox et oy des accélérations

Axe horizontal ox

Avec la force due à la résistance de l'air

$$\begin{aligned} m \ddot{x}(t) &= -F_a(t) \cos(\theta(t)) \\ \ddot{x}(t) &= -\frac{1}{m} F_a(t) \cos(\theta(t)) \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

Axe vertical oy

L'équation traduisant l'accélération vaut :

$$\begin{aligned} m \ddot{y}(t) &= -mg - F_a(t) \sin(\theta(t)) \\ \ddot{y}(t) &= -g - \frac{F_a(t) \sin(\theta(t))}{m} \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

A.1.2 Expressions sur ox et oy des vitesses

Axe horizontal ox

En intégrant cette équation avec la vitesse initiale $V_{0x} = V_0 \cos(\alpha)$ nous obtenons l'expression de la vitesse horizontale. :

$$\dot{x}(t) = V_0 \cos(\alpha) - \frac{1}{m} \int_0^t F_a(t) \cos(\theta(t)) dt \quad (E.10)$$

Axe vertical oy

$$\dot{y}(t) = V_0 \sin(\alpha) - g t - \frac{1}{m} \int_0^t F_a(t) \sin(\theta(t)) dt$$

$$\dot{y}(t) = V_0 \sin(\alpha) - g t - \frac{1}{m} \int_0^t F_a(t) \sin(\theta(t)) dt \quad (E.11)$$

Remarque

La force de frottement $F_a(t)$ contient le carré de la vitesse, sachant que les deux composantes de la vitesse sont $\dot{x}(t)$ et $\dot{y}(t)$ nous aurons $V^2(t) = \dot{y}(t)^2 + \dot{x}(t)^2$.

En outre l'inflexion de la flèche d'un angle $\theta(t)$ se calcule à partir des mêmes composantes.

$$\theta = \arctan \left(\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} \right)$$

Les deux équations différentielles (E.10) et (E.11) sont non-linéaires implicite de la forme :

$$\dot{x}(t) = g \left(\dot{x}(t), \dot{y}(t) \right) \text{ et } \dot{y}(t) = f \left(\dot{x}(t), \dot{y}(t) \right)$$

Pour ce type d'équation il n'existe pas de solutions analytiques et seules des techniques d'intégration numérique permettent d'obtenir une solution.

A.1.3 Calcul pratique de la trajectoire

Comme nous venons de le voir, si l'on exprime les frottements de l'air à l'aide de la relation (E.7) nous obtenons des équations non linéaires dont il n'existe pas de solutions analytiques.

Pour résoudre ce problème à l'aide de techniques d'intégration numériques il suffit d'exprimer les deux composantes de l'accélération

Pour un pas de calcul, à un instant k , considérons la Vitesse $V(k)$ et l'angle $\theta(k)$ connus.

Il est alors possible de calculer la force de frottement : $F_a(k) = \frac{1}{2} C_x S \rho V(k)^2$

Les accélérations valent alors

$$\ddot{x}(k) = -\frac{1}{m} F_a(k) \cos(\theta(k))$$

$$\ddot{y}(k) = -g - \frac{F_a(k) \sin(\theta(k))}{m}$$

Ensuite nous les intégrons numériquement pour obtenir les composantes de la vitesse ⁴

$$\dot{x}(k) \approx \int_0^t \ddot{x}(k) dt$$

$$\dot{y}(k) \approx \int_0^t \ddot{y}(k) dt$$

Il est alors possible de calculer l'angle : $\theta(k) = \arctan \left(\frac{\dot{y}(k)}{\dot{x}(k)} \right)$ et

le carré de la vitesse $V(k)^2 = \left(\dot{y}(k) \right)^2 + \left(\dot{x}(k) \right)^2$

Ensuite, intégrons à nouveau les vitesses pour obtenir les déplacements

$$x(k) \approx \int_0^t \dot{x}(k) dt$$

$$y(k) \approx \int_0^t \dot{y}(k) dt$$

La procédure de calcul est réitérée à chaque pas d'intégration numérique k.

Les résultats donnés dans ce fascicule ont été obtenus par cette méthodologie.

⁴ Ici le symbole \int d'intégration continue est impropre, car c'est une méthode d'intégration numérique.