ANNEXE D

Changements de systèmes de coordonnées

1. PREAMBULE

En astronomie, suivant les besoins, le système de référence peut être le lieu d'observation de la terre (repère topocentrique), le centre de la Terre (repère géocentrique), le centre su Soleil (repère héliocentrique).

Nous allons nous intéresser ici au repère topocentrique local défini par le plan horizontal qui est celui de l'observation et au repère géocentrique défini par le plan équatorial.

Comme nous l'avons abordé au paragraphe 2 du document principal « *Système de coordonnées* » la direction du Soleil nécessite deux angles.

Dans un repère horizontal, ce sont la hauteur 'h' et l'azimut 'a'.

Pour un repère équatorial, ce sont la déclinaison δ et l'angle horaire 'H'.

Les coordonnées d'un lieu étant évidemment définies par la longitude λ et la latitude φ.

Nous allons ici nous intéresser aux passages entre ces deux systèmes de coordonnées.

Ainsi connaissant la déclinaison δ et l'angle horaire 'H' comment calculer la hauteur 'h' et l'azimut 'a' et réciproquement.

2. REPRESENTATION

Reprenons sur la même figure les représentations horizontales et équatoriales. La direction Oz' est perpendiculaire au plan équatorial, la direction Oz est perpendiculaire au plan horizontal local. L'angle entre ces deux axes ne dépend que de la latitude du lieu et vaut : $\widehat{POZ} = \frac{\pi}{2} - \varphi$

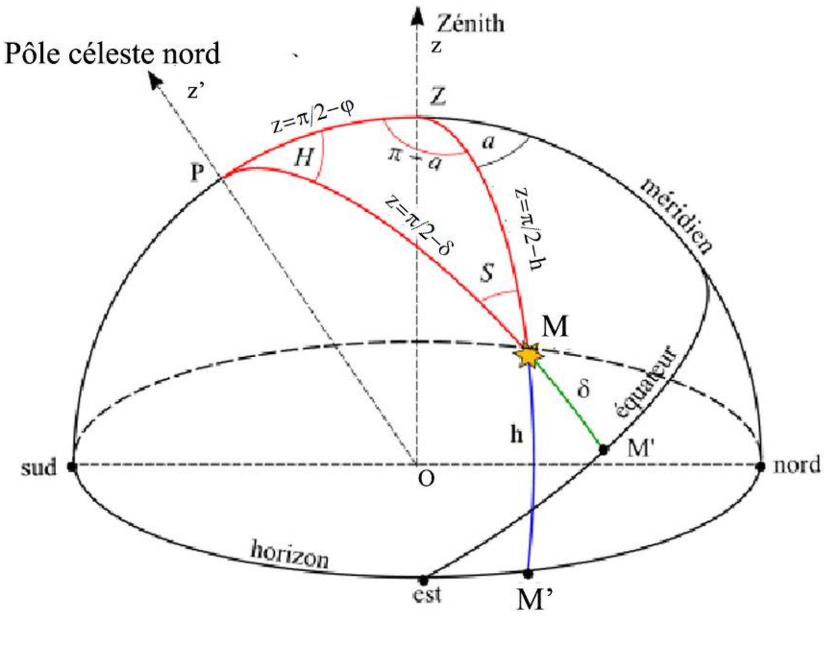

Figure D-1 : Représentation des coordonnées horizontales et équatoriales

Nous pouvons vérifier qu'à l'équateur $(\varphi = 0)$ et au pôle Nord $\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right)$ la direction du pôle céleste Nord sera respectivement l'horizontale et la verticale du lieu.

Le point représente la position d'un astre, ici le Soleil.

Considérons le triangle sphérique local MPZ nous aurons : $\widehat{POM} = \frac{\pi}{2} - \delta$ et $\widehat{ZOM} = \frac{\pi}{2} - h$

Les angles du triangle sont :

Au point P : l'angle horaire 'H'

Au point Z : le complément à 180 degrés de l'azimut soit $\pi - a$

Aux points P, Z et M faisons correspondent les points A, B, C de la figure C-1.

Il vient :

$$a = \widehat{ZOM} = \frac{\pi}{2} - h \qquad \alpha = H \tag{D.1}$$

$$b = \widehat{POM} = \frac{\pi}{2} - \delta \qquad \beta = \pi - a \tag{D.2}$$

$$c = \widehat{POZ} = \frac{\pi}{2} - \varphi \qquad \gamma = S = ? \tag{D.3}$$

3. PASSAGE DES COORDONNEES HORIZONTALES VERS EQUATORIALES

Nous devons ici trouver les relations qui assurent le calcul de la déclinaison δ et de l'angle horaire 'H' à partir de la hauteur 'h' et l'azimut 'a' et de la latitude φ du lieu d'observation.

Rappel sur quelques propriétés élémentaires de la trigonométrie.

Dans le cercle trigonométrique, il est aisé de démonter :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos(\theta) \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin(\theta)$$

$$\sin(\pi - \theta) = \sin(\theta) \qquad \cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$$

$$\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$$

Pour les deux grandeurs recherchées (δ et 'H') reprenons la relation (C.2) dans laquelle nous remplacerons les paramètres à partir des identités (D.1) (D.2) et (D.3).

$$\cos(b) = \cos(a)\cos(c) + \sin(a)\sin(c)\cos(\beta)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - h\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - h\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\cos(\pi - a)$$

$$\boxed{\sin(\delta) = \sin(h)\sin(\varphi) - \cos(h)\cos(\varphi)\cos(a)} \tag{D.4}$$

Cette relation assure la détermination de la déclinaison δ.

Pour obtenir l'angle horaire nous établirons deux relations issues des équations (C.7).et (C.10)

Avec (C.7) nous avons: $\dfrac{\sin(a)}{\sin(\alpha)} = \dfrac{\sin(b)}{\sin(\beta)}$

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-h\right)}{\sin(H)} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)}{\sin(\pi-a)}$$

$$\frac{\cos(h)}{\sin(H)} = \frac{\cos(\delta)}{\sin(a)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\cos(\delta)\sin(H) = \cos(h)\sin(a)} \qquad \text{(D.5)}$$

À partir (C.10) : $\sin b\cos(\alpha) = \cos(a)\sin(c) - \sin(a)\cos(c)\cos(\beta)$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)\cos(H) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-h\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}-h\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\cos(\pi-a)$$

$$\boxed{\cos(\delta)\cos(H) = \sin(h)\cos(\varphi) + \cos(h)\sin(\varphi)\cos(a)} \qquad \text{(D.6)}$$

De ces trois relations il est possible de déduire δ et 'H' à partir de 'a', 'h', et φ.

4. PASSAGE DES COORDONNEES EQUATORIALES VERS HORIZONTALES

Maintenant, intéressons-nous au problème inverse, c'est-à-dire, connaissant la déclinaison δ et l'angle horaire 'H' comment, pour une latitude connue φ, calculer l'azimut 'a' et la hauteur 'h' dans un repère horizontal.

Pour calculer la hauteur 'h' prenons la relation (C.1) ans laquelle, comme précédemment nous remplacerons les paramètres à partir des identités (D.1) (D.2) et (D.3).

$$\cos(a) = \cos(b)\cos(c) + \sin(b)\sin(c)\cos(\alpha)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-h\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\cos(H)$$

$$\boxed{\sin(h) = \sin(\delta)\sin(\varphi) + \cos(\delta)\cos(\varphi)\cos(H)} \qquad \text{(D.7)}$$

Pour obtenir l'azimut 'a' nous reprendrons la relation (D.5) et développerons l'équation (C.8).

Relation (D.5) $\boxed{\cos(h)\sin(a) = \cos(\delta)\sin(H)}$

Équation (C.8): $\sin(a)\cos(\beta) = \cos(b)\sin(c) - \sin(b)\cos(c)\cos(\alpha)$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-h\right)\cos(\pi-a) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\cos(H)$$

$$-\cos(h)\cos(a) = \sin(\delta)\cos(\varphi) - \cos(\delta)\sin(\varphi)\cos(H)$$

$$\boxed{\cos(h)\cos(a) = -\sin(\delta)\cos(\varphi) + \cos(\delta)\sin(\varphi)\cos(H)} \qquad \text{(D.8)}$$

Les relations (D.9), (D.5) et (D.8) assure le passage des coordonnées équatoriales (δ et 'H') aux coordonnées horizontales ('a' et 'h').