Annexe C

Trigonométrie sphérique

Considérons trois points A, B, C qui sont les intersections de trois grands cercles.

Nous rappelons qu'un grand cercle correspond à l'intersection avec la sphère d'un plan passant par son centre.

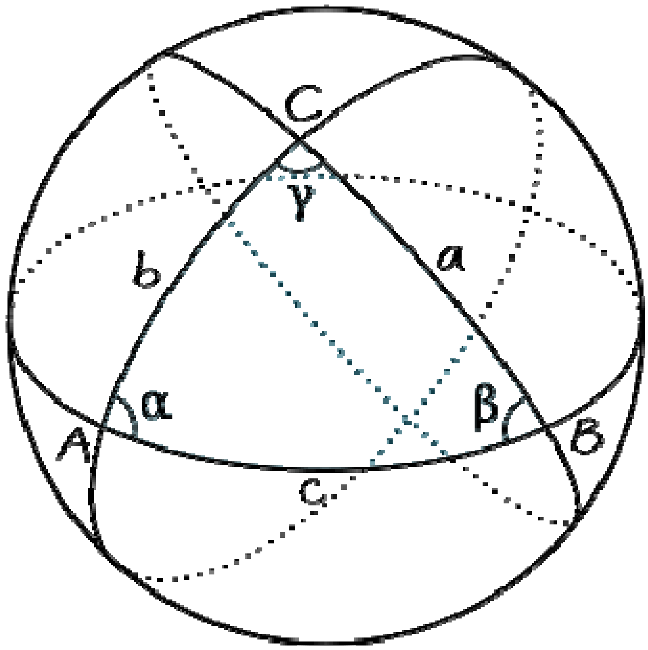

Figure C-1 : Représentation d'un triangle d'Euler

Soit O le centre de la sphère, nous noterons : α, β, γ les angles aux sommets A, B, C du triangle curviligne ABC dit triangle d'Euler.

Conjointement seront noté a, b, c les angles sous-tendus au centre O de la sphère.

$$a = \widehat{BOC} \qquad b = \widehat{COA} \qquad c = \widehat{AOB}$$

Nota :

Les relations les plus importantes en trigonométrie sphérique ont été établies en 1593 par François VIETE.

Lois des cosinus pour les côtés

La relation qui relie la longueur d'un côté à celles des deux autres et leur angle est la suivante :

$$\cos(a) = \cos(b)\cos(c) + \sin(b)\sin(c)\cos(\alpha) \qquad \text{(C.1)}$$

Par permutation circulaire, nous obtenons :

$$\cos(b) = \cos(a)\cos(c) + \sin(a)\sin(c)\cos(\beta) \qquad \text{(C.2)}$$

$$\cos(c) = \cos(b)\cos(a) + \sin(a)\sin(b)\cos(\gamma) \qquad \text{(C.3)}$$

Loi des cosinus pour les angles

Les relations duales sont obtenues en remplaçant tous les grands cercles par leurs points polaires.

$$\cos(\alpha) = -\cos(\beta)\cos(\gamma) + \sin(\beta)\sin(\gamma)\cos(a) \quad (C.4)$$

$$\cos(\beta) = -\cos(\alpha)\cos(\gamma) + \sin(\alpha)\sin(\gamma)\cos(b) \quad (C.5)$$

$$\cos(\gamma) = -\cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)\cos(c) \quad (C.6)$$

Lois des sinus

De ces relations découle la propriété :

$$\frac{\sin(a)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(b)}{\sin(\beta)} = \frac{\sin(c)}{\sin(\gamma)} \quad (C.7)$$

Propriétés.

À partir des trois relations sur les cosinus reliant les côtés nous allons établir six relations génériques utiles en astronomie.

Prenons la relation (C.1) exprimant le cosinus de ‘a’.

$$\cos(a) = \cos(b)\cos(c) + \sin(b)\sin(c)\cos(\alpha)$$

Remplaçons dans cette relation $\cos(c)$ à partir de (C.3)

$$\cos(a) = \cos(b)\left[\cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)\cos(\gamma)\right] + \sin(b)\sin(c)\cos(\alpha)$$

$$\cos(a) = \cos(b)\left[\cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)\cos(\gamma)\right] + \sin(b)\sin(c)\cos(\alpha)$$

$$\Rightarrow \cos(a)\left[1 - \cos^2(b)\right] - \sin(a)\sin(b)\cos(b)\cos(\gamma) = \sin(b)\sin(c)\cos(\alpha)$$

$$\sin(c)\cos(\alpha) = \cos(a)\sin(b) - \sin(a)\cos(b)\cos(\gamma)$$

Avec la même équation, (C.1) si l’on prend en (C.2) l’expression de $\cos(b)$ nous obtenons une relation similaire :

$$\sin(b)\cos(\alpha) = \cos(a)\sin(c) - \sin(a)\cos(c)\cos(\beta)$$

Ainsi en prenant successivement les trois 3 relations des cosinus ((C.1), (C.2) et (C.3)) nous obtiendrons les six relations suivantes :

$$\sin(a)\cos(\beta) = \cos(b)\sin(c) - \sin(b)\cos(c)\cos(\alpha) \quad (C.8)$$

$$\sin(a)\cos(\gamma) = \cos(c)\sin(b) - \sin(c)\cos(b)\cos(\alpha) \quad (C.9)$$

$$\sin(b)\cos(\alpha) = \cos(a)\sin(c) - \sin(a)\cos(c)\cos(\beta) \quad (C.10)$$

$$\sin(b)\cos(\gamma) = \cos(c)\sin(a) - \sin(c)\cos(a)\cos(\beta) \quad (C.11)$$

$$\sin(c)\cos(\alpha) = \cos(a)\sin(b) - \sin(a)\cos(b)\cos(\gamma) \quad (C.12)$$

$$\sin(c)\cos(\alpha) = \cos(a)\sin(b) - \sin(a)\cos(b)\cos(\gamma) \quad (C.13)$$