ANNEXE B

Représentations du plan et de la droite dans l'espace

1. ÉQUATION D'UN PLAN PASSANT PAR 3 POINTS

L'équation cartésienne d'un plan a la forme générale :

$$ax + by + cz + d = 0 \qquad \text{(B.1)}$$

Nous allons ici voir comment calculer cette équation, à partir des coordonnées de trois points non colinéaires, il passe un plan.

Soit trois points :.

$$\text{Point A} \begin{bmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{bmatrix} \quad \text{Point B} \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix} \quad \text{Point C} \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix} \qquad \text{(B.2)}$$

Nous allons utiliser la méthode utilisant un vecteur normal à la surface au plan passant par les points A, B, C.

Pour y parvenir, dans un premier temps, prenons deux vecteurs coplanaires avec ce plan.

Soit par exemple, les vecteurs $\underline{AB}$ et $\underline{AC}$ qui vaudront :

$$\underline{AB} = \begin{bmatrix} x_b - x_a \\ y_b - y_a \\ z_b - z_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{xb} \\ v_{yb} \\ v_{zb} \end{bmatrix} \qquad \underline{AC} = \begin{bmatrix} x_c - x_a \\ y_c - y_a \\ z_c - z_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{xc} \\ v_{yc} \\ v_{zc} \end{bmatrix}$$

Le vecteur normal au plan est défini par le produit vectoriel ce ces deux vecteurs, nous noterons $\underline{N}$ ce vecteur normal, il vient :

$$\underline{N} = \underline{AB} \wedge \underline{AC} \qquad \underline{N} = \begin{bmatrix} v_{xb} \\ v_{yb} \\ v_{zb} \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} v_{xc} \\ v_{yc} \\ v_{zc} \end{bmatrix} \qquad \underline{N} = \begin{bmatrix} v_{yb}v_{zc} - v_{zb}v_{yc} \\ v_{zb}v_{xc} - v_{xb}v_{zc} \\ v_{xb}v_{yc} - v_{yb}v_{xc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}$$

Prenons maintenant un point M quelconque appartenant au plan ABC. De coordonnées :

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Le vecteur $\underline{AM}$ vaudra : $\underline{AM} = \begin{bmatrix} x - x_a \\ y - y_a \\ z - z_a \end{bmatrix}$, celui-ci est perpendiculaire au vecteur normal $\underline{N}$ et le produit scalaire de ces deux vecteurs sera nul.

$$\underline{AM} \bullet \underline{N} = 0$$

$$\underline{AM}\bullet\underline{N}=\begin{bmatrix}x-x_a\\y-y_a\\z-z_a\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}n_x\\n_y\\n_z\end{bmatrix}=\left(x-x_a\right)n_x+\left(y-y_a\right)n_y+\left(z-z_a\right)n_z=0 \qquad (B.3)$$

$$n_x x+n_y y+n_z z-x_a n_x-y_a n_y-z_a n_z=0$$

Nous retrouvons bien l'équation d'un plan sous la forme (B.1), il vient par identification

$$a=n_x \quad b=n_y \quad c=n_z \quad d=-x_a n_x-y_a n_y-z_a n_z$$

De ces relations découle la propriété :

Tout plan normal à un vecteur normal $\underline{N}=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$ a pour équation $ax+by+cz+d=0$.

2. ÉQUATION D'UNE DROITE

2.1. Intersection de deux plans

L'équation d'une droite peut être vue comme l'intersection de deux plans, l'équation de celle-ci sera la solution du système suivant :

$$\begin{cases}ax+by+cz+d=0\\a'x+b'y+c'z+d'=0\end{cases}$$

2.2. Équation paramétrique

Considérons un point A de coordonnées : $\begin{bmatrix}x_a\\y_a\\z_a\end{bmatrix}$ et de vecteur directeur $\underline{V}=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$

L'équation paramétrique de la droite de direction $\underline{V}$ et passant par le point A sera :

$$\begin{cases}x=a\,t+x_a\\y=b\,t+y_a\\z=c\,t+z_a\end{cases}$$

2.3. Équation cartésienne

Soit comme un vecteur directeur $\underline{V}$ et un point A de coordonnées : $\begin{bmatrix}x_a\\y_a\\z_a\end{bmatrix}$

L'équation cartésienne sera de la forme :

$$\frac{x-x_a}{a}=\frac{y-y_a}{b}=\frac{z-z_a}{c}$$